**Вероятностная мера, математическое ожидание**

**Математическое ожидание для простых случайных величин**

Случайная величина называется простой, если она может быть представлена в виде

где обозначает индикатор множества , , причем множества составляют разбиение: при и .

**Определение.** Математическое ожидание простой случайной величины равно:

Докажем корректность такого определения, а именно, его независимость от вида представления простой случайной величины как суммы индикаторов. Пусть имеется два представления , использующих различные разбиения

Тогда, учитывая, что при , получаем

**Теорема 19.1.** Математическое ожидание обладает сформулированными ниже свойствами.

А). Линейность математического ожидания. Пусть существуют , , и пусть

c – константа. Тогда имеют место равенства

, .

(аддитивность и однородность).

Б). Положительность. Если , то Если , существуют и , то

.

В). Конечность. Если , конечно, то и конечно. Если и конечно, то   
 конечно. Если , конечны, то конечно.

**Доказательство.** Сформулированная Теорема справедлива для любых случайных величин, однако доказательство ее будет составлено поэтапно: сначала для простых случайных величин, затем для неотрицательных и лишь затем - в общем случае.

Рассмотрим доказательство для простых случайных величин.

Пусть и представлены в виде

Очевидно, множества составляют разбиение, причем, для будет , так что

и отсюда следует

Вторая часть утверждения А) очевидна.

Положительность Б). Если , то в формуле для математического ожидания все и потому Если , то и тогда, по только что доказанному, .

Конечность В). Для простых случайных величин и всегда конечны.

**Математическое ожидание для неотрицательных случайных величин**

Рассмотрим теперь случайные величины, не являющиеся конечными, но принимающие только неотрицательные значения. Каждую неотрицательную случайную величину можно представить как предел сходящейся возрастающей последовательности простых случайных величин в каждой точке

**Определение.** Математическое ожидание неотрицательной случайной величины определяется как предел

Этот предел может быть как конечным, так и бесконечным.

Пример монотонной последовательности простых случайных величин, сходящихся к данной :

Эта последовательность удовлетворяет неравенствам

и для

то есть, для любого .

Для дальнейшего понадобится следующее утверждение.

**Лемма 19.1.** Пусть , - простые неотрицательные случайные величины, причем,

. Тогда

**Доказательство.** Обозначим

для некоторого , тогда при , следовательно, . Имеют место неравенства

и согласно свойству положительности математического ожидания,

где число *c* выбрано так, чтобы для любого . Но тогда

а поскольку , то

при любом . В силу произвольности это и доказывает утверждение Леммы.

С помощью этой Леммы докажем следующее утверждение: для любых двух последовательностей неотрицательных простых случайных величин

Зафиксируем некоторое *m* и применим Лемму к последовательности , тогда получаем

откуда следует

Но, с другой стороны, мы можем поменять местами последовательности и получить противоположное неравенство. Это и означает справедливость равенства

Докажем теперь свойства А)В) Теоремы 19.1. для неотрицательных случайных величин.

А). Пусть , тогда и по определению

Б). Из следует . Если , то из следует

В). Для имеем , так что . Если и , то из   
 следует .

**Математическое ожидание в общем случае**

Произвольная случайная величина может быть единственным образом представлена в виде линейной комбинации неотрицательных случайных величин,

,

где , .

**Определение.** Математическое ожидание произвольной случайной величины определяется через математические ожидания неотрицательных случайных величин:

если правая часть этого равенства имеет смысл, то есть, не равны одновременно . Если , то полагают ; если же ,, то .

Докажем свойства А)В) Теоремы 19.1. для произвольных случайных величин.

А). Из разложения следует если и если , таким образом,

Докажем свойство аддитивности математического ожидания. Из равенства , где - неотрицательные случайные величины, следует ,

, где . Действительно, согласно равенствам

(

- множество вещественных чисел,